

SOLLICITATION SIMPLE FLEXION SIMPLE

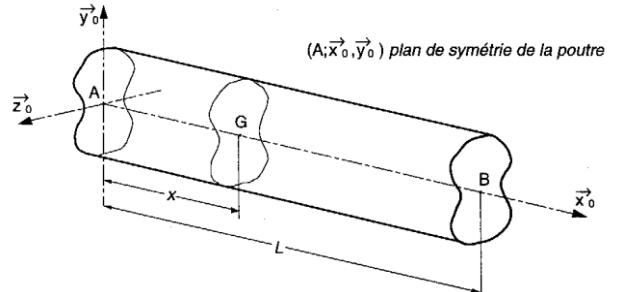
1. TORSEUR DE COHESION :

Dans le cas de la flexion simple selon \vec{z} , le torseur de cohésion est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_{coh}(x)\} = \begin{cases} \vec{R}(x) = T_y(x) \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_G(x) = M_{f_z}(x) \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Rem : si $T_y(x) = 0$ la sollicitation est de la flexion pure.

On ne considèrera que les poutres droites chargées dans le plan de symétrie $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. La flexion est alors qualifiée de « plane ».



2. CHAMP DES DEPLACEMENTS- CHAMP DES DEFORMATIONS :

Un point P de la section droite sera repéré par $(0, y, z)$ dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ attaché à la section droite.

Les lois de comportement donnent :

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) \quad \tau_y(x) = G \cdot \gamma_y(x) \quad \tau_z(x) = G \cdot \gamma_z(x)$$

Les relations entre les éléments de réduction du torseur de cohésion et les contraintes donnent :

$$\begin{aligned} \vec{R}(x) &= \int_{\Sigma} \vec{C}(P, \vec{x}) \cdot dS \\ \vec{M}_G(x) &= \int_{\Sigma} \vec{GP} \wedge \vec{C}(P, \vec{x}) \cdot dS \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \vec{C}(M, \vec{x}) &= \sigma_x(x) \cdot \vec{x} + \tau_y(x) \cdot \vec{y} + \tau_z(x) \cdot \vec{z} \\ \vec{GM} &= y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

Après calcul et étant donnée la forme du torseur de cohésion on obtient :

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_{\Sigma} \sigma_x(x) \cdot dS = 0 & M_t(x) &= \int_{\Sigma} [\tau_z(x) \cdot y - \tau_y(x) \cdot z] \cdot dS = 0 \\ T_y(x) &= \int_{\Sigma} \tau_y(x) \cdot dS & M_{f_y}(x) &= \int_{\Sigma} \sigma_x(x) \cdot z \cdot dS = 0 \\ T_z(x) &= \int_{\Sigma} \tau_z(x) \cdot dS = 0 & M_{f_z}(x) &= - \int_{\Sigma} \sigma_x(x) \cdot y \cdot dS \end{aligned}$$

On montre que les seuls déplacements non nuls sont :

- la translation selon \vec{y} : $u_y(x)$
- la rotation selon \vec{z} : $\theta_z(x)$

On remarque également que :

- $\tau_y(x) \neq 0$: Il y a des **contraintes tangentielle** selon \vec{y} dans la poutre.
- $\sigma_x(x) \neq 0$: Il y a des **contraintes normales** selon \vec{x} dans la poutre.

Le torseur des déplacements est donc de la forme :

$$\{U(x)\} = \begin{cases} \vec{\theta}(x) = \theta_z(x) \cdot \vec{z} \\ \vec{U}_G(x) = u_y(x) \cdot \vec{y} \end{cases}$$

En reportant ces résultats dans les expressions des contraintes, on montre qu'il vient :

$$\begin{aligned} T_y(x) &= \int_{\Sigma} G \cdot \varepsilon_y(x) \cdot dS = \int_{\Sigma} G \cdot \left[\frac{du_y(x)}{dx} - \theta_z(x) \right] \cdot dS = G \cdot \left[\frac{du_y(x)}{dx} - \theta_z(x) \right] \cdot S \\ M_{f_z}(x) &= - \int_{\Sigma} \sigma_x(x) \cdot y \cdot dS = \int_{\Sigma} y^2 \cdot E \cdot \frac{d\theta_z(x)}{dx} \cdot dS = E \cdot \frac{d\theta_z(x)}{dx} \cdot \int_{\Sigma} y^2 \cdot dS \end{aligned}$$

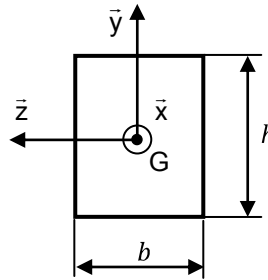
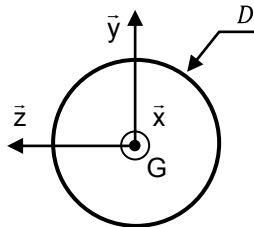
On pose alors :

$$I(G, \vec{z}) = \int_{\Sigma} y^2 \cdot dS \quad I(G, \vec{z}) \text{ est le moment quadratique de la section droite } \Sigma \text{ par rapport à l'axe } (G, \vec{z})$$

Exercice :

Déterminer l'expression du moment quadratique $I(G, \vec{z})$ dans le cas :

- d'une poutre de section circulaire, de diamètre D
- d'une poutre de section rectangulaire : hauteur h selon \vec{y} , largeur b selon \vec{z}



Des deux équations précédentes, on peut tirer les nouvelles relations suivantes :

$$\frac{du_y(x)}{dx} = \theta_z(x) + \frac{T_y(x)}{G \cdot S} \qquad \frac{d\theta_z(x)}{dx} = \frac{Mf_z(x)}{E \cdot I(G, \vec{z})}$$

La déformée de la ligne moyenne $u_y(x)$ s'obtient en dérivant la première équation :

$$\frac{d^2u_y(x)}{dx^2} = \frac{d\theta_z(x)}{dx} + \frac{1}{G \cdot S} \cdot \frac{dT_y(x)}{dx} = \frac{Mf_z(x)}{E \cdot I(G, \vec{z})} + \frac{1}{G \cdot S} \cdot \frac{dT_y(x)}{dx}$$

L'observation de cette équation prouve que la poutre se déforme sous l'effet de l'effort tranchant $T_y(x)$ et du moment fléchissant $Mf_z(x)$.

Dans la recherche de l'équation de la déformée $u_y(x)$ de la poutre, on montre que le terme dû à l'effort tranchant $T_y(x)$ est négligeable face à celui dû au moment fléchissant $Mf_z(x)$.

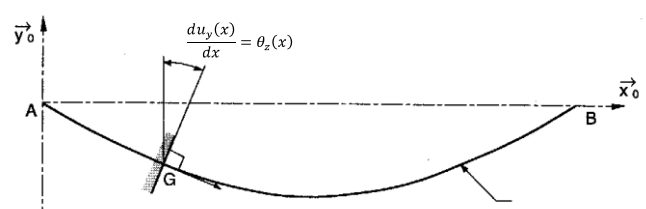
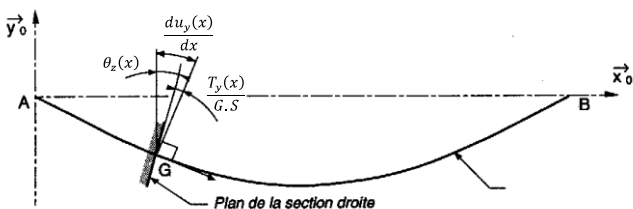
Ceci revient donc à négliger la déformation due à l'effort tranchant devant celle due au moment fléchissant.

Ainsi, pour déterminer l'équation de la déformée $u_y(x)$ de la poutre, on dispose de la relation suivante :

$$\boxed{\frac{d^2u_y(x)}{dx^2} = \frac{Mf_z(x)}{E \cdot I(G, \vec{z})}}$$

avec de plus

$$\boxed{\frac{du_y(x)}{dx} = \theta_z(x)}$$



En intégrant deux fois la première équation on obtiendra l'équation de la déformée $u_y(x)$ de la poutre.

La deuxième équation nous permettra de trouver l'angle de rotation $\theta_z(x)$ d'une section droite d'abscisse x .

Rem :

La double intégration de la première équation introduit 2 constantes qui seront déterminées grâce aux **conditions limites**.

Encastrement en A ($x = 0$) :

- déplacement nul en A : $u_y(0) = 0$
- pente nulle en A : $\theta_z(0) = 0$

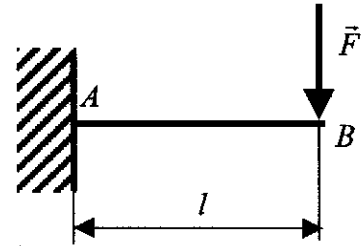
Appui ponctuel en A ($x = 0$) :

- déplacement nul en A : $u_y(0) = 0$

Exercice :

Déterminer l'équation de la déformée de la poutre.

Déterminer la flèche en B.



3. CHAMP DES CONTRAINTES :

Hypothèse :

On considère que la contrainte tangentielle due aux efforts tranchants est négligeable face à la contrainte normale due au moment de flexion.

On s'intéresse au point P de la section droite repéré par $(0, y, z)$ dans le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ attaché à la section droite.

La loi de HOOKE permet d'écrire :

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) = E \cdot \left[-y \cdot \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right] = E \cdot \left[-y \cdot \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} \right] = E \cdot \left[-y \cdot \frac{M_{fz}(x)}{E \cdot I(G, \vec{z})} \right]$$

Donc :

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_{fz}(x)}{I(G, \vec{z})} \cdot y$$

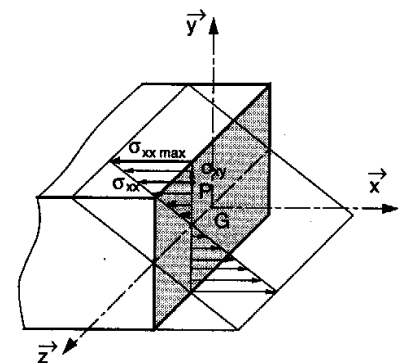
y : cote en y du point P à la fibre neutre

La valeur de la contrainte normale dépend de l'abscisse x de la section droite et de la cote en y du point P.

La **contrainte normale** est **linéaire** en y dans une section droite donnée.

La répartition des contraintes normales dans une section droite a donc l'allure ci-contre :

- $y > 0$, la poutre est comprimée : $\sigma_x(x, y) < 0$
- $y < 0$, la poutre est tendue : $\sigma_x(x, y) > 0$



Rem :

La contrainte maximale est atteinte en $y = D/2$ pour une poutre à section circulaire de diamètre D .

La contrainte maximale est atteinte en $y = h/2$ pour une poutre à section rectangulaire de hauteur h .

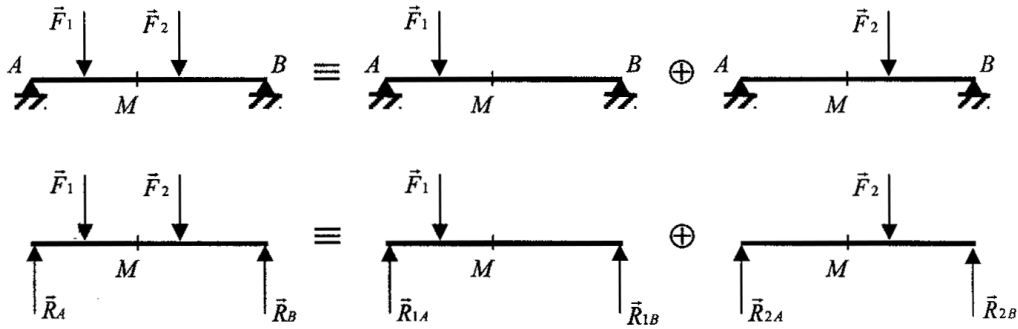
4. PRINCIPE DE SUPERPOSITION :

Déformation : la déformation en un point d'une poutre soumise à plusieurs actions mécaniques est égale à la somme algébrique des déformations dues à chacune des actions mécaniques agissant séparément.

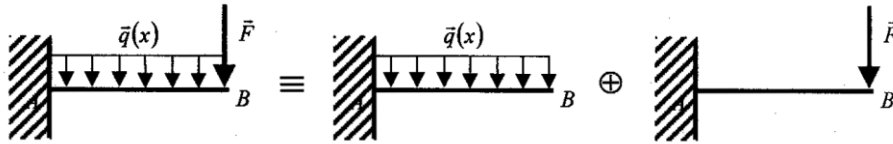
Contrainte : la contrainte en un point d'une poutre soumise à plusieurs actions mécaniques est égale à la somme algébrique des contraintes dues à chacune des actions mécaniques agissant séparément.

Exemple 1 :

$$u_y(M) = u_{y1}(M) + u_{y2}(M) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \vec{R}_A &= \vec{R}_{1A} + \vec{R}_{2A} \\ \vec{R}_B &= \vec{R}_{1B} + \vec{R}_{2B} \end{aligned}$$



Exemple 2 :



$$u_y(B) = u_{y1}(B) + u_{y2}(B)$$

5. CONDITION DE RESISTANCE :

Hypothèse :

On considère que la contrainte tangentielle due aux efforts tranchants est négligeable face à la contrainte normale due au moment de flexion.

On considère une poutre soumise à de la flexion plane.

On veut savoir si celle-ci est capable de résister.

On cherche donc à savoir si les contrainte au sein du matériau ne dépasse pas une valeur limite caractérisant le matériau.

Etant donné l'hypothèse, on ne dimensionne la poutre que par un critère limitant la contrainte normale.

Cette limite est appelée R_{pe} **Résistance pratique à la traction** (MPa)

La condition de résistance s'exprime donc par :

$$[\sigma_x(x, y)]_{max} \leq R_{pe}$$

Rem :

Dans certains cas, on applique un coefficient de sécurité s .

La condition de résistance s'exprime alors par :

$$[\sigma_x(x, y)]_{max} \leq \frac{R_{pe}}{s}$$

6. BIBLIOGRAPHIE :

MECANIQUE DES SYSTEMES INDUSTRIELS Tome 2 Efforts et structures R. BONCOMPAIN Editions DUNOD

MECANIQUE APPLIQUEE P. AGATI Editions DUNOD

RESISTANCE DES MATERIAUX P. AGATI Editions DUNOD